# ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘ. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ
## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ.

πχ 1

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 12y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 \end{aligned} \;\Big|\rightarrow\; y_1'' = y_1' + 12y_2' = (y_1 + 12y_2) + 13(3y_1 + y_2) = 37y_1 + 24y_2$$

Συνεπώς, η $y_1'' = 37y_1 + 24y_2$

Τότε, θα έχουμε:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1' &= y_1 + 12y_2 \\ y_1'' &= 37 + 4y_2 \end{aligned} \right. \;\Big|\rightarrow\; y_1'' - 2y_1' = 35y_1$$

Και έχουμε:

$y_1'' - 2y_1' - 35y_1 = 0$ και καταλήγουμε σε μια εξίσωση με μια άγνωστη συνάρτηση

$$y_1'' - 2y_1' - 35y_1 = 0 \underset{\chi.\pi}{\Rightarrow} \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0 \Rightarrow \lambda = 7 \text{ ή } \lambda = -5$$

ΒΣΛ $\{e^{-5x}, e^{7x}\}$ άρα $y_1(x) = c_1 \cdot e^{-5x} + c_2 e^{7x}$.

Και για να βρούμε την $y_2$ (καθαρά αλγεβρικά) στην 1η εξίσωση αντικαθιστούμε την $y_1$:

$$y_2(x) = \frac{1}{12}(y_1' - y_1) = \dots = \frac{1}{12}\left(-6c_1 \cdot e^{-5x} + 6c_2 \cdot e^{7x}\right)$$

ΠΧ2

(1) $\left.\begin{array}{l} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -y_2 \end{array}\right| \Rightarrow y_2' + y_2 = 0 \overset{\chi.\pi.}{\Rightarrow} \lambda = -1$

Άρα $y_2 = c_1 \cdot e^{-x}$

Άρα, στην (1) είναι:

$y_1' - y_1 = -2c_1 \cdot e^{-x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y_1(x) = \dots$

ΑΣΚΗΣΗ 2 ii (σελ. 113)

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 4y_2 - y_3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$y_1'' = 3y_1' + 2y_2' + 2y_3' =$

$= 3(3y_1 + 2y_2 + 2y_3) + 2(y_1 + 4y_2 + y_3) + 2(-2y_1 - 4y_2 - y_3) =$

$= \boxed{7y_1 + 6y_2 + 6y_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1''' = 7y_1' + 6y_2' + 6y_3' \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1''' = 7(3y_1 + 2y_2 + 2y_3) + 6(y_1 + 4y_2 + y_3) + 6(-2y_1 - 4y_2 - y_3) =$

$\Rightarrow \boxed{y_1''' = 15y_1 + 14y_2 + 14y_3}$

Έτσι, έχουμε

$$\left.\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_1'' = 7y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\ y_1''' = 15y_1 + 14y_2 + 14y_3 \end{cases}\right| (-3) \Rightarrow y_1'' - 3y_1' = -2y_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$

Άρα, $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0 \overset{\chi.\pi}{\Rightarrow} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$

Συνεπώς, $y_1(x) = c_1 e^x + c_2 \cdot e^{2x}$

Άρα, στην αρχική σχέση

$$\left.\begin{cases} y_2' = 4y_2 + y_3 + y_1 \\ y_3' = -2y_1 - 4y_2 - y_3 \end{cases}\right| \Rightarrow y_2'' = 4y_2' + y_3' + y_1' \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_2'' = 4(y_1 + 4y_2 + y_3) + (-2y_1 - 4y_2 - y_3) + y_1' =$

$= 12y_2 + 2y_1 + 3y_3 + y_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2'' = 12y_2 + 3y_3 + y_1' + 2y_1$

$y_2' = 4y_2 + y_3 + y_1 \leftarrow$ πολ/ζω $(-3)$

$y_2'' - 3y_2' = y_1' + 2y_1 - 3y_1 = y_2 \Rightarrow y_2'' - 3y_2' - y_2 = 0.$

Βρίσκουμε το $y_2(x)$ και κάνοντας αντικατάσταση βρίσκουμε αλγεβρικά το $y_3(x)$.

Πχ 3.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$y_1'' = y_1' - y_2 - y_3' = (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3) =$$
$$= 3y_1 - 5y_2 - y_3$$
$$\Rightarrow y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' =$$
$$= 3(y_1 - y_2 - y_3) - 5(y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3) =$$
$$= y_1 - 19y_2 - 7y_3$$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{cases} \Bigg| (-1), (-7) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'' - y_1' = 2y_1 - 4y_2 \\ y_1''' - 7y_1' = -6y_1 - 12y_2 \end{cases} \Bigg| (-3)$$

$$\Rightarrow y_1''' - 7y_1' - 3y_1'' + 3y_1' + 12y_1 = 0$$
$$\Rightarrow y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \dots$ (ομογ. με σταθ. συντελ.) χ.π. $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2$$
ΒΣΛ $\{e^{+3x}, e^{+2x}, e^{-2x}\}$ κτλ.

ΑΣΚΗΣΗ 3i (σελ. 213)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 - y_2 - e^x \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$y_1'' = y_1' + y_2' + e^x = (y_1 + y_2 + e^x) + (y_1 - y_2 - e^x) + e^x =$$
$$= 2y_1 + e^x \Rightarrow y_1'' - 2y_1 = e^x$$

Παίρνουμε την ομογενή

$$y_1'' - 2y_1 = 0 \xRightarrow{\chi\pi} \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

ΒΣΛ $\{e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}\}$ $\quad y_1^{(ομ)} = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$

Άρα, για την $y_1'' - 2y_1 = e^x$ (περ. 2η)

Θέτω $y_1 = z \cdot e^x$

$z'' \cdot e^x + 2z' \cancel{e^x} + z \cancel{e^x} - z \cdot 2\cancel{e^x} = e^x \Rightarrow z'' + 2z' - z = 1 \xRightarrow{\text{μη. L}^2}$

$\Rightarrow \boxed{z = -1}$, ισοδύναμα $z_1^{\mu} = -e^x$

Επομένως, $y_1(x) = y_1^{ομ}(x) + z_1^{\mu}(x)$

## Άσκηση A-5 (ΠΡΟΟΔΟΣ)

Έχουμε ΒΣΛ $\{\sin x, \cos x\}$ της ομογενούς $L(y)=0$ $2^{ης}$ τάξης με $a_2 = 1$, $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$L(y) = b$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

**ΛΥΣΗ**

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 1 & \sin x \end{vmatrix} = -\cos x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = \sin x$$

$$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \sin x + \cos x \int_1^x \frac{W_1(s)}{W(s)} b(s)\, ds +$$

$$+ \sin x \int_1^x \frac{W_2(s)}{W(s)} b(s)\, ds = \ldots$$

με τις συνθήκες $y_1(1) = 1$ και $y_1'(1) = 1$

$\Rightarrow c_1 = \ldots$ και $c_2 = \ldots$

## Άσκηση Προόδου (ΟΜΑΔΑ Α)

$x_0 \in I$ | n-τάξη $L(y) = 0$

$\exists$ Β.Σ.Λ $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ ώστε $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 2015$;

**ΛΥΣΗ**

$y_1$ λύση : $y(x_0) = 2015$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$

$y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$y_1(x_0)=0 \quad y_2(x_0)=0 \dots \quad y^{(4-1)}(x_0)=1$

$$W(y_1,\dots,y_4)(x_0)=\begin{vmatrix} 2015 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=2015$$

(B-36)

$$\sum_{i=0}^{7} y^{(i)}=0 \Rightarrow y^{(7)}+y^{(6)}+\dots+y'+y=0$$

Άρα, το χ.π. $\lambda^7+\lambda^6+\dots+\lambda+1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^8-1}{\lambda-1}=0 \quad \lambda\neq 1 \Rightarrow \lambda^8-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda^4-1)(\lambda^4+1)=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)(\lambda^4+1)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)(\lambda^4+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1, \ \lambda=-1, \ \lambda=\pm i, \ z^4=-1$$

⋮ Αφήνεται ως άσκηση